Reimmaginare l'aula di matematica: le matematiche scolari come prassi di emancipazione.

Luis Radford

Radford, L. (2021). Reimaginar el aula de matemáticas: Las matemáticas escolares como praxis emancipadora [Reimagining the mathematics classroom: School mathematics as emancipatory praxis.]. *Revista Chilena de Educación Matemática*, *13*(2), 44-55. https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i2.88

Lo scopo di questo articolo è reinventare l'aula di matematica. Inizio riflettendo sulla scuola riformata, quella che in Occidente si è assunta il compito di educare le nuove generazioni ad affrontare i problemi dell'industrializzazione 100 anni fa, e che oggi è orientata alla formazione di soggetti dotati di competenze per progredire nel progetto neoliberista delle società basate sull'economia di mercato. Nella prima parte affronto alcuni elementi che mi aiutano a spiegare che cosa potrebbe essere andato storto nel progetto della scuola riformata occidentale; in particolare, cerco di capire, attraverso un'analisi storico-critica, che cosa l'ha portata a diventare un luogo di produzione di soggetti alienati. La domanda è: che cosa conferisce alla scuola moderna o postmoderna la sua configurazione attuale e la mantiene lì, legata? Nella seconda parte condivido alcune idee che abbiamo esplorato con insegnanti e studenti nelle nostre scuole nel tentativo di uscire dalla morsa dell'alienazione e che ci hanno portato a ripensare la matematica scolastica come una prassi emancipatrice.

1. Introduzione[18]

Lo scopo di questo articolo è invitarvi a reinventare l'aula di matematica. Il prefisso "re" significa che abbiamo già immaginato quella classe e suggerisce, allo stesso tempo, che dobbiamo rifarlo, e dobbiamo farlo perché qualcosa è andato storto. L'aula di matematica non sembra essere ciò che volevamo.
Il sottotitolo dell'articolo suggerisce una direzione da seguire: matematica scolastica e prassi emancipatrice. La prima parte del sottotitolo circoscrive la portata o il limite della mia argomentazione: riguarda *la matematica scolastica*

[18] Questo testo è tratto da una lezione plenaria tenuta al 24° *Convegno nazionale sull'insegnamento della matematica* in Cile, tenutasi nell'aprile 2021. Una versione abbreviata è disponibile negli Atti del convegno. Come nel testo preparato per il convegno, ho scelto di mantenere lo stile orale della presentazione.

che, pur non essendo l'argomento principale, dovrà essere anch'essa ripensata. La seconda parte del sottotitolo menziona qualcosa di diverso: l'emancipazione.
Emancipare è un concetto il cui significato non è trasparente; è un termine filosofico con una storia complessa. Il dizionario della Real Academia Española la definisce come l'azione di «liberarsi da qualsiasi tipo di subordinazione o dipendenza» (RAE, s. f., definizione 2). Ora, nel mio invito a reimmaginare l'aula di matematica, da chi o da cosa dovrebbe essere emancipata quell'aula? Sto dicendo che c'è qualcuno o qualcosa che la trattiene, la opprime, la costringe, la maltratta e, così facendo, non le permette di essere ciò che *dovrebbe essere*?
Sebbene non sia chiaramente menzionato nella definizione di *emancipazione*, se osserviamo attentamente, possiamo renderci conto che l'idea di emancipazione si basa sulle *relazioni* tra gli uni e gli altri; si basa su relazioni di potere attraverso le quali ciò che opprime viene esercitato e ciò che è oppresso rimane al suo posto.
Che cos'è che opprime? Non è sempre la stessa cosa. Per esempio, ho avuto l'opportunità di partecipare all'intervento di Aldo Parra qualche settimana fa, nell'ambito di una serie di conferenze virtuali organizzate dall'associazione *Aprender en Red*. Lì, Aldo ci ha raccontato di una piccola comunità indigena nel Cauca, in Colombia (Parra, 2021); non parlava direttamente di emancipazione, ma ciò non significa che il problema dell'emancipazione non fosse presente. In questa comunità indigena del Cauca, la categoria di "ciò che opprime" è plasmata da una serie di meccanismi politici, economici e militari con cui la comunità in questione deve confrontarsi per mantenere il proprio spazio di azione e realizzazione. Ciò che lì opprime è probabilmente diverso da ciò che esercita pressione nelle scuole in cui svolgo il mio lavoro educativo. Nelle mie scuole, gli studenti provengono da famiglie della classe media, appartenenti a minoranze linguistiche, del Nord Ontario, Canada; sono scuole francofone. Fanno parte di quelle che vengono chiamate *scuole riformate* (Darling, Nordenbo, 2002; Labaree, 2005; Rohrs, Lenhart, 1995), cioè quelle che, in Occidente, 100 anni fa si sono assunte il compito di educare le nuove generazioni ad affrontare i problemi dell'industrializzazione e che, oggi, sono orientate alla produzione di soggetti con competenze per far progredire il progetto neoliberista di società legate all'economia di mercato (Giroux, 1997; Gohier, Fabre, 2015). Sembra però che il risultato non sia stato soddisfacente: la scuola è diventata in larga misura un luogo di produzione di soggetti alienati. Da qui nasce il mio invito a reimmaginare *la scuola* in generale e l'aula di matematica in particolare. Per raggiungere questo obiettivo, dobbiamo innanzitutto sforzarci di ripensare criticamente l'insegnamento della matematica contemporanea, in particolare i suoi presupposti teorici e ideologici. Da questo scavo critico Possiamo sperare che emerga una comprensione di ciò che sostiene e mantiene l'aula di matematica nella sua posizione attuale.
Come ho detto, ciò che frena le mie scuole non è necessariamente la stessa cosa

che frena la scuola di cui ci parla Aldo o quelle che compaiono nelle ricerche di ognuno di voi, anche se probabilmente condividiamo gli stessi satelliti di sorveglianza e gli attacchi dell'Organizzazione per la cooperazione e lo sviluppo economico (OCSE), e la nuova forma di imperialismo che essa dispiega incessantemente. I nostri contesti sono diversi, ma poiché l'emancipazione, nel suo insieme, è una questione di potere, di relazione con l'altro, credo che possiamo imparare dalle lotte e dai tentativi di emancipazione reciproci.
Il mio articolo si compone di due parti: nella prima affronto alcuni elementi che mi aiutano a spiegare cosa potrebbe essere andato storto nel progetto della scuola riformata occidentale; in particolare, cerco di capire che cosa l'ha portata a diventare un luogo di produzione di soggetti alienati. La domanda è: che cosa conferisce alla scuola moderna o postmoderna la sua configurazione attuale e la mantiene lì, vincolata? Nella seconda parte condivido alcune idee che abbiamo esplorato con insegnanti e studenti nelle nostre scuole nel tentativo di concepire la matematica scolastica come una prassi emancipatrice.

2. L'aula di matematica nella storia recente

Che cosa vedremmo se osservassimo le aule di matematica occidentali degli ultimi 50 anni? Penso che non sia esagerato affermare che vedremmo una classe trainata da due forze opposte, ciascuna delle quali si muove nella direzione di un diverso paradigma educativo: una incentrata sull'insegnante e sulla *conoscenza*, e l'altra incentrata sullo *studente*.
Il primo paradigma è quello della *trasmissione del sapere*. Ciò pone l'insegnante in una posizione privilegiata e presenta l'apprendimento come un'acquisizione relativamente passiva e obbediente di contenuti matematici da parte dello studente. Il secondo paradigma è quello *costruttivista.* Ciò pone lo studente in una posizione privilegiata e pone l'apprendimento come risultato dell'attività dello studente.

Nel corso di una lunga storia di opposizioni, questi due paradigmi hanno finito per fondersi in un terzo paradigma che alcuni chiamano "sociocostruttivista" (Jonnaert, Masciotra, 2004) e altri "indagine dello studente" (*inquiry based paradigm;* vedere, per esempio, il Ministero dell'Educazione dell'Ontario, 2013). Questo paradigma di fusione ci offre una nuova idea dell'aula di matematica in cui lo studente e il professore appaiono in primo piano. Nelle aule ispirate a questo paradigma, l'obiettivo è quello di incoraggiare da un lato, la *partecipazione attiva* e l'autonomia dello studente e, dall'altro, di garantire al

professore lo spazio per *guidare* gli studenti e *facilitare* il loro apprendimento.[19] Questo paradigma dà origine a una varietà di modelli didattici che potrebbero essere ordinati in base all'intensità *della* partecipazione dell'insegnante, dalla partecipazione massima a quella minima. Farò tre esempi.
La prima, che chiamo "guida pedagogica massima", funziona in modo molto simile alla didattica tradizionale. L'insegnante controlla la produzione e la circolazione delle idee in classe (Figura 1, riquadro di sinistra) e consente allo studente solo una partecipazione minima e insignificante, ad esempio chiamandolo alla lavagna, ponendogli domande molto brevi, ecc. (Figura 1, riquadro centrale). Si tratta di un insegnamento tradizionale che aggiunge elementi costruttivisti in modo cosmetico.

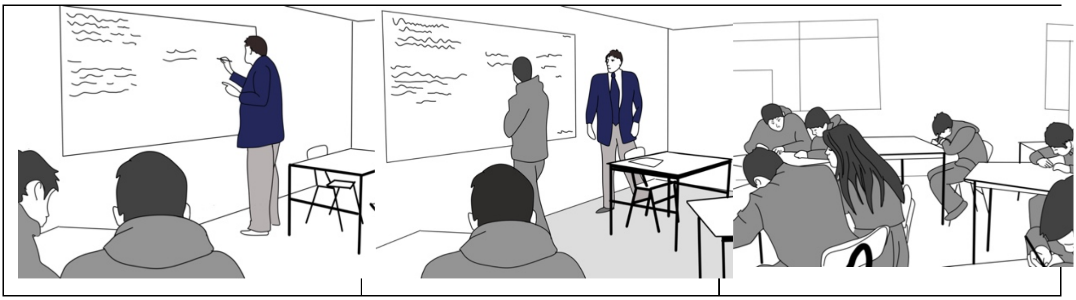


Figura 1. Esempio di una classe che opera sotto la "massima guida pedagogica". (Fonte: A cura degli autori).

Nel secondo modello, chiamato in Ontario "insegnamento tramite modellazione", l'insegnante "modella" la soluzione del problema per gli studenti; ciò significa che si inizia *mostrando* agli studenti come fare le cose (per esempio, come risolvere un nuovo problema). L'insegnante poi scompare gradualmente, lasciando così a poco a poco la responsabilità allo studente (Gauthier et al., 2013).
All'altro estremo di questa gamma di modelli didattici troviamo la "guida pedagogica minima" proposta da Godino e Burgos (2020). Questi autori sostengono che, a causa della complessità della conoscenza matematica, l'autonomia degli studenti non può essere il punto di partenza per l'apprendimento. Si può partire dal paradigma della trasmissione della conoscenza, con una "guida pedagogica minima" (p. 96), per poi passare al paradigma costruttivista.

[19] Una definizione offerta dal sito web Thirteen.org (s. f.) è: il paradigma di indagine, a differenza del metodo di insegnamento tradizionale, "è più incentrato sullo studente, con l'insegnante come facilitatore dell'apprendimento" (par. 3). Questa idea emerge anche quando Jonnaert e Masciotra (2007) spiegano il sociocostruttivismo. Questi autori affermano: «La dimensione 'socio' [nel termine sociocostruttivismo] significa che l'insegnante facilita le interazioni tra gli studenti» (p. 57).

Ogni modello di insegnamento di questo paradigma socio-costruttivista sintetico – o indagine – porta a un'aula di matematica con dinamiche leggermente diverse. Le differenze si spiegano a seconda del modo in cui vengono distribuiti i gradi di importanza tra i compiti dello studente e quelli dell'insegnante. Queste aule si ispirano a diversi *presupposti teorici* che sembrano quasi indiscutibili; operano in silenzio, quasi in segreto. Queste ipotesi includono:

a) In primo luogo, l'apprendimento è visto come una caratteristica dello studente.

Ciò significa che l'apprendimento è un fenomeno che viene attribuisce o viene detto a proposito di un soggetto, di un individuo: Pietro ha imparato o non ha imparato una tal cosa. Non è detto, per esempio, che una classe di 30 studenti abbia imparato questo o quello. Sembra strano, vero? Sembra *impreciso*. E se si dice questo, subito ci si chiederà di Pietro: Ha imparato? Quanto ha imparato? Esiste un discorso socio-educativo che attribuisce una *realtà* all'idea di apprendimento come fenomeno che accade (o meno) a qualcuno, lo *studente*.

b) In secondo luogo, uno studente apprende quando sa rispondere *autonomamente* alle domande che gli vengono poste.

Ciò significa che l'autonomia viene assunta come criterio di apprendimento. È il caso della Teoria delle situazioni didattiche (Brousseau, 2002; per una discussione, vedi Radford, 2018). Ecco perché, negli ultimi due esempi di modelli didattici che ho citato, l'insegnante è lì, ma come se non ci fosse, un po' come una nota stonata in un brano musicale.

c) In terzo luogo, si presume che lo studente pensi "naturalmente" in certi modi.[20]

In questo contesto, il compito dell'insegnante è *quello di guidare* lo studente. Per esempio, nel metodo della guida pedagogica minima, si tratta di dare allo studente quella guida minima di cui ha bisogno per raggiungere i concetti matematici; bisogna dargli una piccola spinta, qualcosa di simile al respiro che si darebbe a una barchetta di carta per aiutarla a raggiungere la sua destinazione.

---

[20] Evidentemente, le teorie in didattica della matematica non affermano esplicitamente questo e gli altri presupposti che sto menzionando. Come ho detto prima, queste ipotesi operano quasi segretamente. Per esempio, gli autori di un recente articolo si sono prefissati di identificare i criteri di classificazione e seriazione più importanti utilizzati dai bambini in età prescolare (Casadiego et al., 2020). La domanda è: su quali attributi degli oggetti concreti del mondo del bambino si concentra maggiormente la sua attenzione? Dopo aver osservato l'interazione dei bambini con i blocchi logici, si è concluso che il colore e la dimensione sono le caratteristiche che i bambini identificano più rapidamente. Si può vedere come si supponga tacitamente che i bambini pensino alle forme del loro mondo in modo "naturale". È quindi legittimo pensare che i blocchi logici (e l'ambiente sociale del bambino) non siano portatori di concettualizzazioni culturali. Si dà per scontato che vediamo tutti la stessa cosa. Più avanti, quando parlerò di una scuola in Uganda, vedremo che non è così.

d) In quarto luogo, lo studente è concepito come *un'entità psicologica*.
Lo studente è visto come un "soggetto cognitivo" (Valero, 2004, p. 39), come se portasse nella testa una piccola scatola con idee e rappresentazioni del mondo. Nella sua tesi di dottorato, Maritza Silva sottolinea un passaggio in cui un professore dice a uno studente: «Questo è ciò che devi metterti nella testolina […] denominatore non uguale a zero!, diverso da zero!, non uguale a zero! e registrarlo: non uguale a zero!" (2021, pag. 119). La metafora dietro a tutto questo è che ci sono piccole idee che si muovono nella testa dello studente e da lì escono.
Penso che queste ipotesi ci diano un'idea della classe contemporanea. Per esempio, possiamo vedere che autorizzano l'insegnante e i ricercatori a considerare gli studenti e il loro apprendimento in determinati modi. Pertanto, da parte dell'insegnante, è "naturale" effettuare valutazioni individuali per tenere conto dell'apprendimento degli studenti. Dal punto di vista del ricercatore, sembra "naturale" che lui o lei utilizzi questionari con problemi matematici affinché gli studenti ci rivelino cosa pensano "nella loro testolina".

Tuttavia, dobbiamo andare un po' più a fondo nella nostra analisi delle aule di matematica contemporanee. Si potrebbe obiettare che la mia analisi non ha preso in considerazione un aspetto molto importante: *l'interazione sociale*, che è diventata una caratteristica predominante della pratica scientifica e del discorso in ambito educativo (Radford, 2011). È vero; anche in un'aula con guida pedagogica massima, gli studenti interagiscono tra loro. Questo è ciò che mostra lo schizzo sulla destra della Figura 1. Lo schizzo ci permette di vedere che alcuni studenti sono da soli, mentre altri sono in coppia, il che suggerisce che c'è un tentativo di incoraggiare l'interazione sociale. La domanda allora è: qual è il *significato* del sociale nella dinamica dell'aula nelle classi "sociocostruttiviste"? Come concepiscono il sociale i sociocostruttivisti? Per rispondere a queste domande dobbiamo comprendere la transizione dall'atomo alla monade.

3. Dall'atomo alla monade

Se, da qualche tempo, nel discorso che definisce l'educazione, si parla sempre più de*gli* studenti (al plurale) e non dello studente (al singolare), è perché siamo passati *dall'atomo* alla *monade*. Ciò significa che gli studenti non sono altro che un plurale, cioè una *pluralità* di entità separate le une dalle altre. Ognuno è una monade-studente che pensa con le *proprie* capacità cognitive.
Nel nuovo caso, quello della monade, ciò che vediamo in classe non è *un'unica* attività, bensì tante attività quanti sono gli studenti, ognuno dei quali svolge la propria. Se ci sono n studenti nella classe, ogni studente s_i svolge la propria attività a_i. L'aula di matematica è la somma $\sum s_i$ delle sue monadi e ciò che accade in una lezione di matematica è un insieme $\{a_i\}$di attività individuali.

Ovviamente, il discorso educativo può arrivare a tener conto dell'interazione tra studenti, della comunicazione e persino del riferimento alla lezione che gli studenti hanno seguito *con* l'insegnante. Tuttavia, tutti questi elementi sociali sono visti strumentalmente: sono considerati *stimoli esterni* che l'ambiente offre all'attività cognitiva dello studente (dettagli ed esempi possono essere visti in Radford, 2020a).

4. E qual è il problema?

In questo tipo di aule, che riducono l'interazione sociale a un mero stimolo, il concetto di interazione è molto povero, per non dire sbagliato. Il lavoro di Vygotskij (1987) sulla "zona di sviluppo prossimale" mostra che l'interazione con gli altri, e in particolare con l'insegnante, gioca un ruolo cruciale nell'apprendimento.
Ciò che sto affermando vale anche per gli elementi culturali e storici. Il problema, infatti, è che gli elementi sociali, culturali e storici non possono essere considerati *strumentalmente* nell'apprendimento degli studenti. Questi elementi *non sono* stimoli esterni che l'ambiente offre all'attività cognitiva dello studente; al contrario, fanno parte del modo in cui arriviamo a pensare il mondo (Valero, 2004, 2010).
Klaus Holzkamp (2013), per esempio, dimostra che le concettualizzazioni di un individuo, senza essere determinate dal contesto e dalle circostanze, non sono arbitrarie; sono soggette a processi e concettualizzazioni socioculturali che precedono l'azione dell'individuo.

Vale la pena ricordare qui che il linguaggio opera, tra le altre cose, come vettore di una concettualizzazione culturale. Ciò ci ricorda l'esperienza di Krista, una candidata insegnante, che si è recata in Uganda per svolgere il suo tirocinio di insegnamento. Nel bel mezzo di una lezione di geometria, questa studentessa inglese ha scoperto che la lingua della comunità, il runyankore, non ha «parole per triangolo, rettangolo o persino quadrato. C'è una parola, *orizig*, che significa circolare o curvo, ma non si riferisce specificamente a un cerchio» (Bradford, Brown, 2005, p. 16). È molto facile dimenticare che il mondo in cui viviamo è pieno di concetti storici e culturali che ci coinvolgono e che si riflettono nella materialità del mondo, nel linguaggio che utilizziamo e nelle nostre azioni. È anche molto facile anche dimenticare che i modi di pensare al mondo non sono naturali, ma *culturali*. Quando ce ne dimentichiamo, finiamo per credere che l'attività cognitiva sia esclusivamente nostra, che abbia origine *in noi*, che esca dalla nostra testa.
Diremmo che, in realtà, le cose stanno esattamente al contrario. Dobbiamo capovolgere tutto questo di 180° per comprendere che la cognizione e le idee

che ognuno di noi si forma provengono dall'esterno, per renderci conto che ognuno di noi è ciò che il filosofo olandese Baruch (Benedetto) Spinoza (1989) chiamava un "modo" della "sostanza", vale a dire – nel linguaggio del XXI secolo – che ognuno di noi è una realtà singolare, individuale e limitata della società e che è in questa che troviamo gli elementi attraverso i quali pensiamo soggettivamente il mondo.

5. E come è possibile che una cosa del genere ci sia sfuggita?

La domanda è: come è possibile che una cosa del genere sia passata inosservata e che siamo arrivati a pensare che, per comprendere la cognizione, l'apprendimento e le dinamiche in classe, dovessimo incentrare queste dinamiche sullo studente e aggiungere l'insegnante come guida di cui lo studente potrebbe aver bisogno nei momenti di svenimento o collasso?
La risposta è troppo complessa per essere discussa in dettaglio qui. Mi limiterò a accennare che si tratta della concezione dell'essere umano emersa nell'Alto Medioevo e nel Rinascimento occidentale, quando il nascente capitalismo artigianale e le nuove forme di produzione economica portarono all'emergere di una nuova coscienza sociale che culminò in quella che Colin Morris (1972) ha chiamato "la scoperta dell'individuo". Da allora, l'Occidente ha intrapreso un nuovo percorso in cui, a differenza di altri periodi storici, l'individuo è diventato gradualmente il centro dell'universo.
Poi ha avuto luogo il processo di personalizzazione, secondo Gilles Lipovetsky (1989); cioè il processo che "ha promosso e incarnato in maniera massiccia un valore fondamentale, quello della realizzazione personale". La modernità ha prodotto procedimenti di soggettivazione dai quali è emersa una nuova, gloriosa visione dell'umano: l'individuo come fondamento. Con questo intendo dire che l'individuo è diventato il fondamento di sé stesso e del mondo. Come dice il filosofo francese Etienne Balibar (2014), "è solo *a posteriori*, quando sono già stati costituiti come individui […] che gli individui [della modernità] possono *relazionarsi tra loro* in modi diversi. Ma queste relazioni sono per definizione accidentali; non definiscono la loro essenza" (p. 213).
In ambito politico, il neoliberismo sintetizza questa idea dell'individuo come fondamento, considerandolo il fondamento sociale. La filosofia coglie correttamente questa stessa idea quando afferma che il fondamento dell'essere risiede nella sua libertà di azione (come fa la filosofia kantiana). Nell'ambito della psicologia questa idea si afferma nella concezione del soggetto che si forma dal di dentro, dalla sua stessa interiorità. Così, ad esempio, la mente è considerata un attributo dell'individuo. Nell'ambito educativo, questa idea dell'essere umano come fondamento di sé stesso ha ripercussioni sul concetto di apprendimento, concepito come il risultato delle idee che lo studente si forma

sulla base delle proprie azioni e rappresentazioni. Nell'insegnamento della matematica, come ci insegna il costruttivismo, lo studente costruisce la propria conoscenza (von Glasersfeld, 1995).

Politica	Il fondamento sociale è l'individuo
Filosofia	Il fondamento dell'essere è nella sua libertà di azione
Psicologia	La mente è un attributo dell'individuo
Istruzione	L'apprendimento deriva dalle idee che lo studente forma attraverso le proprie azioni.
Didattica della matematica	Lo studente costruisce la propria conoscenza

Figura 2. L'individuo come fondamento. (Fonte: A cura degli autori).

La figura 2 mostra che ciascuna di queste sfere *sociali* (Radford, 2021a) non fa altro che tradurre, a modo suo e nel suo linguaggio, la forma ideale più generale possibile dell'essere umano, così come concepita dalla modernità e dalla postmodernità. La concezione che spoglia l'essere umano di tutte le sue determinazioni sociali, storiche e culturali, e lo trasforma così in un sé languido e svuotato, che porta con sé solo sé stesso nel suo nucleo più intimo, ciò che i filosofi chiamano la sua *ipseità*, cioè la sua identità. Pedro ha imparato qualcosa durante la lezione di matematica, e ciò che ha imparato è legato solo in modo circostanziale al suo ambiente storico e culturale. Ciò che Pedro ha imparato è *suo*, è il prodotto del *suo* impegno personale e come tale *gli appartiene.* Ha preso l'80% in geometria! Il numero conferisce realtà oggettiva all'apprendimento di Pietro; lo afferma nella sua solitudine ontologica.

Siamo arrivati al punto in cui possiamo rispondere alla domanda che ci siamo posti all'inizio: *cosa* conferisce alla scuola occidentale moderna e postmoderna la sua configurazione attuale e la mantiene nella sua posizione attuale: oppressa. La risposta sta in questa figura storica che possiamo chiamare la *figura dell'ontologia moderna*, che assume come fondamento l'individuo.

Ora, credo, possiamo comprendere cosa, dietro le quinte, segretamente e silenziosamente, plasma le dinamiche di così tante aule di matematica. Ora possiamo capire come e perché le lezioni di matematica siano diventate un luogo di alienazione e cosa sia andato storto nel progetto di riforma della scuola.

L'allievo e l'insegnante rimangono inconsapevoli l'uno dell'altro. La loro relazione è quasi commerciale; uno cerca di massimizzare il proprio apprendimento e l'altro lo aiuta o lo guida ovunque sia necessario (Radford, 2014). Entrambi vivono l'insegnamento e l'apprendimento come se tale esperienza fosse estranea al più ampio contesto storico e culturale, come se non potesse esserci alcuna *vera connessione tra insegnanti e studenti umanamente* possibile.

6. La matematica scolastica come prassi emancipatrice

Come potremmo approcciare le dinamiche dell'aula di matematica per recuperarne la dimensione storico-culturale e concepire l'aula come uno spazio che favorisce relazioni sociali e produce apprendimenti non alienanti?
La ricerca socioculturale ha evidenziato la tremenda complessità che sta alla base nell'aula di matematica e all'apprendimento, e ha focalizzato l'attenzione (tra le altre cose) in quanto segue: 1) il linguaggio; 2) le strutture sociali e simboliche coinvolte nella scuola; 3) la cultura materiale (per esempio, gli artefatti) e 4) le questioni di potere e di genere.
Una parte significativa della ricerca socioculturale ha tentato di considerare l'apprendimento come la partecipazione progressiva del bambino alla pratica sociale o il suo ingresso in comunità di pratica (Lave, Wenger, 1991). Il nostro cammino nella teoria dell'oggettivazione (TO) (Radford, 2021a) riprende i quattro punti sopra menzionati, ma tematizza l'aula e l'apprendimento in modo leggermente diverso. La TO non è una teoria costruttivista, comportamentista o partecipazionista. Vorrei concludere questo articolo con una discussione su questa tematizzazione leggermente diversa.

Innanzitutto è importante dissipare un possibile equivoco: quando dico che non si tratta di focalizzare l'attenzione sullo studente, non intendo dire che non dobbiamo più guardare lo studente. Non voglio dire che ciò che dobbiamo fare ora è volgere il nostro sguardo verso l'insegnante o il sapere. Ciò che intendo dire è che dobbiamo vedere lo studente e l'insegnante, ma non attraverso le lenti della psicologia cognitiva individualistica che li presuppone come soggetti *già dati*, già costituiti; sarebbe opportuno considerare lo studente e l'insegnante come soggetti storici e culturali che si costituiscono quotidianamente e congiuntamente in aula, nel corso dell'attività di insegnamento e apprendimento. Infatti, le aule di matematica producono non solo conoscenza, ma anche soggettività (Radford, 2021a). Tenendo conto di questa idea, la proposta offerta dalla TO considera l'aula di matematica come un'aula che ruota attorno a due assi, quello della *conoscenza* e quello *dell'essere*. Ed è a partire da questi due assi che si propone di concettualizzare l'apprendimento. In altre parole, il problema dell'aula di matematica non riguarda più solo i saperi che lo studente apprende, ma anche il *tipo di soggetto* che le nostre pratiche educative tendono a promuovere.

Ciò che ho appena detto suona terribile se lo ascoltiamo attraverso orecchie costruttiviste, poiché queste operano secondo i precetti della libertà e dell'autonomia dell'individuo. I costruttivisti considerano che l'aula è un luogo in cui gli studenti realizzano i loro progetti personali. Poiché credono che gli studenti si formino dall'interno, secondo la loro essenza e i loro potenziali, l'aula non può essere un luogo che forma lo studente. Tuttavia, il punto è che non esiste educazione che non favorisca certi tipi di saperi e che non promuova la produzione di certe soggettività (Popkewitz, 2004). Paulo Freire aveva sottolineato nella sua opera: «L'educazione non è mai stata e non sarà mai neutrale» (2016, p. 38). L'educazione sarà sempre una questione politica ed economica, motivo per cui l'educazione matematica, sia nella sua pratica che nella sua ricerca, non può fare a meno di porsi la domanda sul tipo di individuo che viene esplicitamente o implicitamente presupposto, promosso.

Nella teoria dell'oggettivazione, intendiamo il progetto educativo come un progetto di emancipazione dalle pratiche correnti che riducono lo studente a soggetto cognitivo (come nel paradigma costruttivista) o a capitale umano (come nel paradigma della trasmissione della conoscenza), e che, in entrambi i casi, offrono una pratica matematica alienante (Radford, 2014, 2016). Concepiamo l'obiettivo dell'educazione matematica come uno sforzo politico, sociale, storico e culturale finalizzato alla creazione dialettica di soggetti riflessivi ed etici che si posizionano criticamente all'interno di pratiche matematiche storicamente e culturalmente costituite e che riflettono su nuove possibilità di azione e pensiero.
Nella TO, l'apprendimento è concepito come un *incontro* con il sapere culturale, la cui caratteristica fondamentale è quella di essere etica e critica. Grazie a queste dimensioni etiche e critiche, gli studenti hanno l'opportunità di collocarsi e posizionarsi socialmente nell'aula di matematica e oltre, e di costituirsi quotidianamente, insieme agli altri, come soggettività. Il punto fondamentale è che è nel *tipo di attività* che studenti e insegnanti producono nell'aula che risiede la possibilità di una pratica emancipatoria (Radford, 2020b).

Nel nostro caso, questa pratica emancipatoria è guidata dalle seguenti idee:
• In primo luogo, si rompe con la tradizionale separazione tra insegnanti e studenti, che pone gli studenti in una posizione di inferiorità e obbedienza rispetto alla produzione e alla circolazione della conoscenza nell'aula. Rompe anche con la separazione costruttivista nella quale l'insegnante è visto come una guida che aiuta gli studenti ad arrivare il più lontano possibile con i propri pensieri.
Nell'attività emancipatoria non ci sono $n+1$ attività svolte simultaneamente nell'aula, le n attività $a_1, a_2, \dots, a_n$ delle monadi $e_1, e_2, \dots, e_n$ più l'attività didattica a_p dell'insegnante, p. Esiste *una sola* attività: l'insegnamento-apprendimento, nella quale studenti e insegnanti lavorano fianco a fianco per produrre e diffondere il sapere matematico in aula.

• In secondo luogo, l’attività emancipatoria consente un *incontro* collettivo con il Sapere culturale. Qui l’apprendimento non è proprietà di un singolo studente, ma di una collettività. Forse ricorderete che ho detto che il primo presupposto che informa l’attuale aula di matematica è che l'apprendimento è *di proprietà dello studente*. Qui facciamo una svolta di 180°. Impariamo insieme, tra tensioni, obiezioni ecc., ma insieme, *collettivamente*.

• In terzo luogo, l’attività di insegnamento-apprendimento fornisce le condizioni affinché questo incontro collettivo includa voci e prospettive diverse nelle quali la differenza è valorizzata. Ma non si tratta di inclusività condiscendente e superficiale proposta dal neoliberismo. Si tratta di un incontro inclusivo in cui gli studenti *si coinvolgono e interagiscono con le idee dell’altro e assumono la responsabilità di comprendere quella voce diversa e di assumere una posizione critica nei suoi confronti*.

• In quarto luogo, l’obiettivo dell’incontro con il sapere attraverso processi collettivi non è quello di far accettare agli studenti le idee e i significati della matematica dominante (quelli già iscritti nel *curriculum*). Si tratta proprio di trovarle, di esaminarle criticamente, di apprezzarne la forza e la dimensione estetica e teorica, e di vederle come espressione di una delle *possibili* razionalità umane, senza, per questo, doverle necessariamente accettare. Mi sembra che una pratica emancipatoria debba riconoscere, allo stesso tempo, le razionalità e ciò che esse offrono, ma anche ciò che esse limitano.

• In quinto luogo, una pratica emancipatoria della matematica scolastica si realizza attraverso la pratica di un’etica che valorizza la responsabilità, l’impegno nel lavoro collettivo e la cura per gli altri (Radford, 2021b).

A titolo di esempio, farò riferimento a un’attività di insegnamento-apprendimento svolta in una classe di quinta primaria (studenti di 10 e 11 anni).[21] Per comprendere l’attività, vale la pena ricordare che nei giorni precedenti gli studenti e l’insegnante avevano risolto collettivamente delle equazioni lineari. Le equazioni sono state risolte utilizzando materiale concreto costituito da cartoncini e buste di carta contenenti al loro interno uno stesso numero sconosciuto di cartoncini. Un esempio di tali equazioni è mostrato nella Figura 3 (pannello di sinistra).

[21] Una presentazione più dettagliata di questo esempio si trova in Radford (2021c).

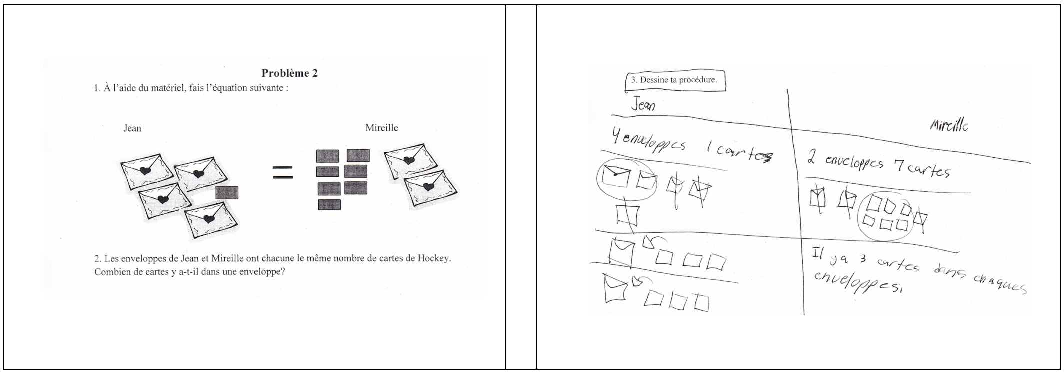


Figura 3. A sinistra: l'equazione data. A destra: la risoluzione dell'equazione.
(Fonte: Elaborazione propria).

Il problema consiste nel trovare il numero di cartoncini in una busta, sapendo che Jean ha quattro buste e un cartoncino, mentre Mireille ha due buste e sette cartoncini e che il numero totale di cartoncini di Jean è lo stesso di quello di Mireille.
Il riquadro a destra della Figura 3 mostra la soluzione proposta da uno studente, che inizia rimuovendo una carta da ciascun lato dell'equazione, quindi due buste da ciascun lato dell'equazione, deducendo così che due buste contengono sei cartoncini. Quindi, divide per due e stabilisce che ci sono tre cartoncini in ogni busta.

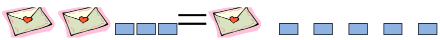
Nell'attività che voglio menzionare, la classe è stata divisa in piccoli gruppi da due a quattro membri. Gli studenti sono stati invitati a svolgere il seguente compito in un lavoro collettivo:

> Si deve scrivere un testo in cui si spiegano i passaggi da seguire per risolvere un'equazione come quelle viste in precedenza. Il testo è indirizzato a uno studente di quinta primaria di un'altra scuola e non si sa se questo studente sappia risolvere le equazioni.
> La spiegazione deve essere chiara, corretta e convincente:
> A. Chiaro: hai capito che cosa dice il testo?
> B. Corretta: questa è la risposta corretta?
> C. Convincente: gli argomenti nel testo sono davvero convincenti?

A differenza dei problemi precedenti (come quello mostrato nella Figura 3), questo compito si propone di spiegare, in termini generali, i passaggi da seguire per risolvere *una qualsiasi equazione*.
Nel gruppo di José, Elisa, Celeste e Carina, la discussione verte su cosa dovrebbe includere il testo. Questo gruppo ha prodotto il testo mostrato nella Figura 4, pannello di sinistra. Poi, incoraggiato dall'insegnante, questo gruppo

ha scambiato il proprio testo con il testo di un altro gruppo (il gruppo di Walton e David). Lo scopo dello scambio era quello di imparare insieme da ciò che altri avevano fatto e di assumere una posizione critica sui testi altrui. Il testo di Walton e David appare nel riquadro centrale della Figura 4. Sulla destra, vediamo gli studenti del gruppo di Elisa che studiano attentamente il testo del gruppo di Walton e David.

Il gruppo di Elisa è sorpreso nel vedere che il foglio dell'altro gruppo ha poche componenti. Celeste dice: «Hanno solo quattro passi; credo che potrebbe essere un po' più lungo ... !». Elisa dice: «Non capisco». Questo gruppo nota che, anziché considerare un'equazione qualsiasi, il testo di Walton e David considera un'equazione *particolare*:



José, che si sente a suo agio con un testo illustrato con un esempio, aggiunge: «Hanno dato un esempio! Se la persona [lo studente di quinta primaria] legge l'esempio, ne capirà il significato».

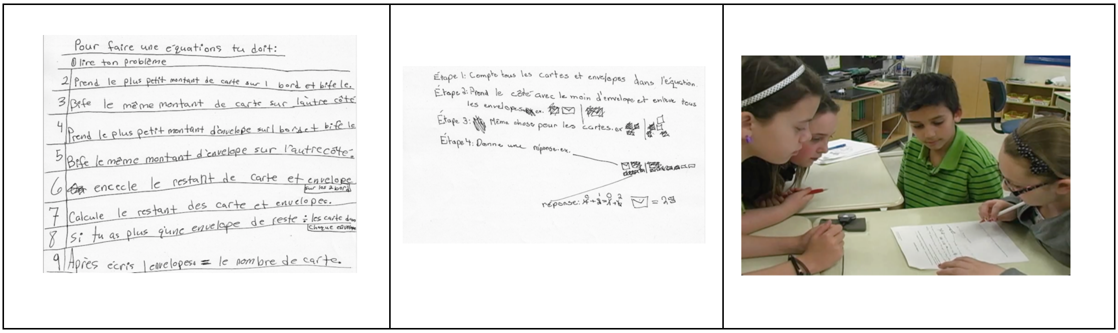


Figura 4. A sinistra: il testo di José, Elisa, Celeste e Carina. Al centro: il testo del gruppo di Walton e David. (Fonte: Archivio dell'autore).

Gli studenti scrivono a turno una critica. Una delle critiche riguarda la fase 2 proposta da Walton e David. Questo passaggio dice: «Prendi il lato [dell'equazione] con il minor numero di buste e togli tutte le buste». Il primo gruppo sostiene che avrebbero dovuto dire che quello stesso numero di buste avrebbe dovuto essere rimosso anche dall'altro lato dell'equazione. La Figura 5 (pannello di sinistra) mostra le annotazioni apportate al testo di Walton e David.

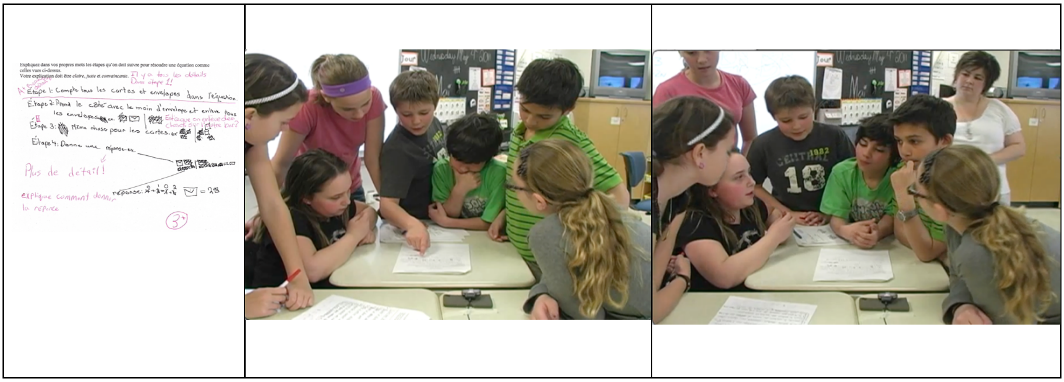


Figura 5. A sinistra: il testo di Walton e David con annotazioni critiche. Al centro e a destra: l'incontro dei due gruppi avvenuto in seguito. (Fonte: Archivio dell'autore).

Dopo aver completato in modo indipendente la loro analisi critica, i gruppi si sono incontrati faccia a faccia (Figura 5, al centro e a destra).
Walton (quarto da sinistra a destra): «Rimuoviamo 3 carte qui» (indica il passaggio sul suo foglio. Vedere Figura 5, riquadro centrale).
Carina (prima da sinistra): «Avresti dovuto dire "e anche 3 carte dall'altro [lato]"» (Figura 5, riquadro di destra).

Come vediamo, l'esame critico del testo dell'altro gruppo, così come la discussione tra i gruppi, rappresentano l'occasione per imparare di più *insieme*. L'apprendimento non è considerato una proprietà dello studente, ma il prodotto di un processo collettivo. Nel corso di questo processo, la matematica si rivela alla coscienza degli studenti non come una semplice conoscenza esterna e formale, ma come *una possibilità culturale* che si *materializza* o *si incarna* in un contenuto concettuale concreto e poliedrico (sia che venga pensato come una generalità espressa in forma singolare, cioè in un esempio concreto, come propongono Walton e David, sia come una generalità *in sé*, come propone il gruppo di Elisa che evita di prendere un esempio concreto). In questa occasione di matematica, l'attività è tale che:

1. In essa l'apprendimento appare come un processo collettivo: non si tratta più di varie attività $a_1, a_2, a_3, \ldots$ singolari, bensì di un'unica attività, *A*.
2. Permette un incontro collettivo con il sapere culturale.
3. Offre la possibilità di entrare in contatto con altre voci e prospettive, non per un guadagno personale ma per la creazione di un'opera (un'idea) comune. Si tratta di un incontro con altre voci e prospettive attraverso il quale studenti e insegnanti si cimentano in confronti, distinzioni e posizioni riguardo alla conoscenza, generando nuove idee lungo il percorso e, a loro volta, affermandosi come soggettività.
4. Permette un incontro critico con il sapere culturale.

5. Si basa sulla pratica di un'etica orientata alla comunità, nella quale gli studenti assumono la responsabilità degli altri, si impegnano nel lavoro collettivo e si prendono cura degli altri.

7. Riepilogo

L'idea di questo articolo è quella di aprire una riflessione sull'aula di matematica, un tentativo di reimmaginarla. Ovviamente, non è la prima volta che gli educatori si trovano ad affrontare questo compito; immaginare l'aula scolastica in generale e l'aula di matematica in particolare è stato il compito che pedagogisti e dirigenti scolastici si sono dati fin dall'inizio del secolo scorso (Labaree, 2005), quando si sono trovati di fronte al problema dell'educazione delle nuove generazioni e alle difficoltà nell'indirizzare le società dell'epoca sulla strada dell'industrializzazione. È qui che emerge la versione moderna del paradigma della trasmissione della conoscenza e la sua idea di insegnamento magistrale che, a differenza di altre precedenti versioni storiche, deve ora educare in massa. Contemporaneamente, in un movimento opposto, appare il paradigma della *scuola centrata sullo studente* (Rugg, Shumaker, 1969), che è all'origine del costruttivismo contemporaneo. Abbiamo visto che due paradigmi educativi, uno incentrato sull'insegnante e sulla conoscenza, l'altro sullo studente, si sono fusi in un nuovo paradigma (il paradigma sociocostruttivista o di indagine guidata dallo studente) che tenta di mettere l'insegnante *e* lo studente in primo piano. Ma quella "e" che lega insegnante *e* studente diventa un grosso problema poiché, protetto dai precetti di libertà e autonomia dello studente – e in effetti da una concezione umanistica dell'individuo risalente all'Illuminismo, cioè al XVIII secolo – l'insegnante non può essere concepito come null'altro che una guida (Radford, 2014). Una soluzione è pensare al connettivo "e" *in modo sincrono*, come proposto dal metodo di modellazione o dal metodo della "guida pedagogica minima" di Godino e Burgos (2020), nel quale il focus dell'attenzione è prima l'insegnante e poi lo studente.

Nella prima parte della mia presentazione ho suggerito alcuni supposti che l'aula di matematica sociocostruttivista presuppone – tra cui quello di pensare alla classe in termini individualistici – che riducono l'attività cognitiva a rappresentazioni soggettive e l'apprendimento a un fenomeno individuale. Ho quindi intrapreso una breve analisi storico-critica per cercare di capire che cosa ci ha portato a concepire la classe in quei termini. La breve analisi storico-critica da me intrapresa suggerisce che la concezione dell'aula contemporanea (nella sua struttura, nelle sue dinamiche e nella sua natura) non è stata casuale o fortuita. Fa parte di un processo storico delle società occidentali di natura economica e politica (Popkewitz, Rizvi, 2009); un processo di progressivo e aggressivo affinamento delle relazioni che definiscono l'individuo; un processo non solo di individuazione, ma di individualizzazione che filosofi, sociologi e antropologi chiamano *individualismo* (Lipovetsky, 1989; Taylor, 2003). Abbiamo visto che la risposta alla domanda che ci siamo posti all'inizio, su *cosa* modella oggi la scuola occidentale moderna e postmoderna e la mantiene dove si trova, oppressa, si trova in questa figura storica, che ho chiamato la *figura dell'ontologia moderna*, che considera l'individuo come fondamento di *sé stesso* e del *suo* mondo. La Figura 2 ci mostra come le diverse sfere *sociali* (politica, filosofia, psicologia ed educazione) traducono ed esprimono questa figura nel loro linguaggio. In questo contesto, non dovrebbe sorprendere che la risposta alla domanda trovi una realtà effettiva nella materializzazione quotidiana di questa figura ontologica che caratterizza le società capitaliste contemporanee.

Nell'ultima sezione ho menzionato alcune idee emerse dalla mia ricerca con insegnanti e studenti e che gettano luce sul nostro lavoro pedagogico nella ricerca di mezzi in grado di delineare una prassi scolastica diversa. Queste idee emergono nell'esempio che ho fornito di un'attività di insegnamento-apprendimento in una classe di quinta primaria. Sebbene molto breve, questo ci consente di illustrare i principi che abbiamo suggerito in precedenza su che cosa potrebbe essere la matematica scolastica come prassi emancipatrice. L'apprendimento è inteso come un *incontro collettivo* con la conoscenza culturale che si rivela alla coscienza degli studenti attraverso l'attività di insegnamento-apprendimento. Si tratta di un incontro il cui scopo non è far accettare agli studenti un modo di pensare alla matematica. Si tratta, al contrario, di un incontro che offre la possibilità di entrare in contatto con altre voci e prospettive, non per migliorare la prospettiva soggettiva, come nel caso della classe di monadi sopra menzionata, che operano guidate dal tornaconto personale. Si tratta di un contatto storico-culturale con altre voci attraverso il quale gli individui si costituiscono continuamente *insieme agli altri*.

Questa mia proposta non deve essere confusa con quello che potrebbe essere l'esercizio di una languida democrazia di espressione di soggettività essenzialmente indipendenti. Al contrario, affermo l'idea di una classe emancipata che funzioni come uno spazio di produzione di conoscenze e soggettività nella quale studenti e insegnanti producono insieme matematica. Lì si esprimono e si producono relazioni sociali; imparano gli uni dagli altri come posizionarsi socialmente, come ascoltare, confutare, obiettare, criticare, apprezzare e vedere che ci sono molti modi di pensare matematicamente; in questo modo escono dalla loro nicchia solipsistica per diventare soggettività culturali, critiche ed etiche. A differenza delle attività alienanti che racchiudono il soggetto in sé, attività come quelle illustrate nel nostro breve esempio di quinta primaria, offrono linee guida per svolgere un lavoro collaborativo in cui

studenti e insegnante possono riconoscersi nelle idee che circolano in classe, incontrando al contempo un'esteriorità concettuale culturale che si riflette in vari modi nei ragionamenti che essi stessi mobilitano.
Non è dunque solo la pratica della matematica scolastica che dobbiamo mettere in discussione, ma anche la nostra concezione della matematica stessa. Credo che la si debba concepire in modo diverso, non come un sapere esterno e formale, ma come un sapere dotato di una logica storica e dinamica, il cui contenuto è dato alla vita concreta della classe attraverso la mediazione dell'attività umana sensibile, del lavoro congiunto di insegnanti e studenti. Questa mediazione non è un esercizio formale del pensiero né un assoggettamento dell'individuo, bensì una mediazione che conduce a una logica poliedrica, nella determinazione di un processo reale che contiene già le condizioni della sua stessa oggettività relativa. La sua normatività razionale viene proposta come possibile riferimento per l'arricchimento collettivo. È evidente che è impossibile affrontare con la profondità richiesta la questione di cosa potrebbe essere la matematica scolastica come prassi emancipatrice. Spero tuttavia che questo breve articolo possa suggerire nuove vie di azione e di riflessione.

Riconoscimento

Questo articolo è il risultato di un programma di ricerca sovvenzionato dal Social Sciences and Humanities Research Council of Canada / Le Conseil de Recherches en Sciences Humaines du Canada (SSHRC/CRSH).
Questo articolo è stato pubblicato nella *Revista Chilena de Educación Matemática*, *13*(2), 44-55. https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i2.88

Riferimenti bibliografici

Balibar, É. (2014). *La philosophie de Marx*. París: La Découverte. https://doi.org/10.3917/dec.balib.2014.01

Bradford, K., Brown, T. (2005). Ceci n'est pas un "circle". *For the Learning of Mathematics*, *25*(1), 16-19.

Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Casadiego, A., Avendaño, K., Chávarro, G., Avendaño, G., Guevara, L., Avendaño, A. (2020). Criterios de clasificación en niños de preescolar utilizando los bloques lógicos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 23*(3), 311-330. https://doi.org/10.12802/relime.20.2332

Darling, J., Nordenbo, S. (2002). Progressivism. In N. Blake, P. Smeyers, R. Smith, y P. Standish (Eds.) (2002), *The philosophy of education* (pp. 288-308). Oxford: Blackwell. https://doi.org/10.1002/9780470996294.ch17

Freire, P. (2016). *Pedagogia da solidariedade*. São Paulo, Brasil: Paz & Terra. https://doi.org/10.4324/9781315422817

Gauthier, C., Bissonnette, S., Richard, M. (2013). *Enseignement explicite et la réussite des élèves. La gestion des apprentissages*. Québec, Canada: Éditions du Renouveau Pédagogique Inc.

Giroux, H. (1997). *Los profesores como intelectuales*. Barcelona: Paidós.

Godino, J., Burgos, M. (2020). ¿Cómo enseñar las matemáticas y ciencias experimentales? Resolviendo el dilema entre transmisión e indagación. *Revista Paradigma*, *41*, 80-106. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p80-106.id872

Gohier, C., Fabre, M. (2015). *Les valeurs éducatives au risque du néo-libéralisme*. Mont-Saint-Aignan: Presses universitaires de Rouen et du Havre. https://doi.org/10.4000/books.purh.1582

Holzkamp, K. (2013). *Psychology from the standpoint of the subject*. Hampshire, UK: Palgrave Macmillan.

Jonnaert, P., Masciotra, D. (2004). *Constructivisme. Choix contemporains.* Québec: Presses de l'Université du Québéc. https://doi.org/10.2307/j.ctv18ph31k

Jonnaert, P., Masciotra, D. (2007). Socioconstructivisme et logique de compétences pour les programmes d'études. In L. Lafortune, E. Moussadak, y P. Jonnaert (Eds.)(2007), *Observer les réformes en éducation* (pp. 53-75). Québec: Presses de l'Université du Québec.

Labaree, D. (2005). Progressivism, Schools and Schools of Education: An American Romance. *Paedagogica Historica*, *41*(1-2), 275-288. https://doi.org/10.1080/0030923042000335583

Lave, J., Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511815355

Lipovetsky, G. (1989). *L'ére du vide. Essais sur l'individualisme contemporain*. París: Gallimard.

Morris, C. (1972). *The discovery of the individual, 1050-1200*. New York, NY: Harper & Row.

Ontario Ministry of Education. (2013). *Inquiry-based learning*. Ottawa: Queen's Printer for Ontario. http://www.edu.gov.on.ca/eng/literacynumeracy/inspire/research/CBS_inquirybased.pdf.

Parra, A. (2021, 16 de abril). *Una educación matemática propia es posible: ¿pregunta o afirmación?* [Conferencia]. Seminario de la Asociación Aprender en Red, Venezuela. https://www.youtube.com/watch?v=A7c0UiYZC9g.

Popkewitz, T. (2004). The alchemy of the mathematics curriculum: Inscriptions and the fabrication of the child. *American educational research journal*, *41*(1), 3-34. https://doi.org/10.3102/00028312041001003

Popkewitz, T., Rizvi, F. (2009). *Globalization and the study of education*. Hoboken, New Jersey: Wiley-Blackwell.

Radford, L. (2011). Classroom interaction: Why is it good, really? *Educational Studies in Mathematics*, *76*, 101-115. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9271-4

Radford, L. (2014). On teachers *and* students: An ethical cultural-historical perspective. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, y D. Allan (Eds.)(2014), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 1, pp. 1-20). Vancouver: PME.

Radford, L. (2016). On alienation in the mathematics classroom. *International Journal of Educational Research*, *79*, 258-266. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2016.04.001

Radford, L. (2018). On theories in mathematics education and their conceptual differences. In B. Sirakov, P. de Souza, M. Viana (Eds.) (2018), *Proceedings of the international congress of mathematicians.* (Vol. 4, pp. 4055-4074). Singapore: World Scientific Publishing Co.

Radford, L. (2020a). Un recorrido a través de la teoría de la objetivación. In S. Takeco Gobara, L. Radford (Eds.)(2020), *Teoria da Objetivação: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática* (pp. 15-42). São Paulo, Brazil: Livraria da Física. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2020.n16.p27-42.id306

Radford, L. (2020b). ¿Cómo sería una actividad de enseñanza-aprendizaje que busca ser emancipadora? La labor conjunta en la teoría de la objetivación. *Revista Colombiana* *de Matemática Educativa, RECME, Número especial de la Teoría de la Objetivación*, *5*(2), 15-31. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2020.n16.p27-42.id306

Radford, L. (2021a). *The theory of objectification. A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning*. Leiden & Boston: Brill/Sense. https://doi.org/10.1163/9789004459663

Radford, L. (2021b). La ética en la teoría de la objetivación. In L. Radford, M. Silva Acuña (Eds.) (2021), *Ética: Entre educación y filosofía* (pp. 107-141). Bogotá: Universidad de los Andes.

Radford, L. (2001c). La enseñanza-aprendizaje del álgebra en la teoría de la objetivación. En: L. Radford, V. Moretti (Eds.)(2001), *Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais: Diálogos e Complementaridades entre a Teoria da Objetivação e a Teoria Histórico-Cultural*. São Paulo: Livraria da Fisica.

Real Academia Española. (s. f.). *Emancipar*. En Diccionario de la lengua española. https://dle.rae.es/emancipar

Rohrs, H., Lenhart, V. (1995). *Progressive Education Across the Continents: A Handbook*. Berne: Peter Lang.

Rugg, H., Shumaker, A. (1969). *The child-centered school*. New York: World Book Company.

Silva, M. (2021). *Modelo pedagógico para los docentes de matemática que dictan clases en carreras de la salud en universidades privadas no selectivas de la Región Metropolitana* [tesis de doctorado inédita no publicada, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación].

Spinoza, B. (1989). *Ethics Including the Improvement of the Understanding*. (R. Elwes, Trad.). Buffalo: Prometheus.

Taylor, C. (2003). *The ethics of authenticity*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Thirteen.org. (s. f). *Concept to classroom. How does it differ from the traditional approach?* https://www.thirteen.org/edonline/concept2class/inquiry/index_sub1.html

Valero, P. (2004). Postmodernism as an attitude of critique to dominant mathematics education research. En: M. Walshaw (Ed.) (2004), *Mathematics education within the postmodern* (pp. 35-54). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. London: The Falmer Press.

Vygotsky, L.S. (1987). *The Collected Works of L. S. Vygotsky* (Vol. 1). New York: Plenum.